

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

**Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2023 года
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

подготовлен федеральным государственным бюджетным
научным учреждением

«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

**Пояснения к демонстрационному варианту
контрольных измерительных материалов единого государственного
экзамена 2023 года по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

При ознакомлении с демонстрационным вариантом контрольных измерительных материалов (КИМ) единого государственного экзамена (ЕГЭ) 2023 г. следует иметь в виду, что задания, включённые в него, не отражают всех элементов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2023 г. Полный перечень элементов содержания, которые могут контролироваться на едином государственном экзамене 2023 г., приведён в кодификаторе элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена 2023 г. по математике.



В демонстрационном варианте представлены конкретные примеры заданий, не исчерпывающие всего многообразия возможных формулировок заданий на каждой позиции варианта экзаменационной работы.

Назначение демонстрационного варианта заключается в том, чтобы дать возможность любому участнику ЕГЭ и широкой общественности составить представление о структуре будущих КИМ, количестве заданий, об их форме и уровне сложности.

Приведённые критерии оценки выполнения заданий с развёрнутым ответом, включённые в этот вариант, дают представление о требованиях к полноте и правильности записи развёрнутого ответа.

В демонстрационном варианте представлено по несколько примеров заданий на некоторые позиции экзаменационной работы. В реальных вариантах экзаменационной работы на каждую позицию будет предложено только одно задание.

Эти сведения позволят выпускникам выработать стратегию подготовки к ЕГЭ в 2023 г.

**Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2023 года
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

-	0	,	8																	
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1** Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Угол BAC равен 32° . Найдите угол BOC . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

ИЛИ

Площадь треугольника ABC равна 24; DE – средняя линия, параллельная стороне AB . Найдите площадь треугольника CDE .

Ответ: _____.

ИЛИ

В ромбе $ABCD$ угол DBA равен 13° . Найдите угол BCD . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

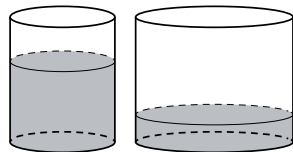
ИЛИ

Стороны параллелограмма равны 24 и 27. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 18. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.

Ответ: _____.

2

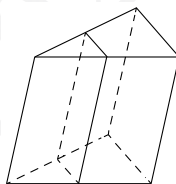
В первом цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. Эту жидкость перелили во второй цилиндрический сосуд, диаметр основания которого в 2 раза больше диаметра основания первого. На какой высоте будет находиться уровень жидкости во втором сосуде? Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ: _____.

ИЛИ

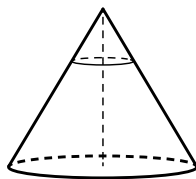
Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ: _____.

ИЛИ

Через точку, лежащую на высоте прямого кругового конуса и делящую её в отношении 1:2, считая от вершины конуса, проведена плоскость, параллельная его основанию и делящая конус на две части. Каков объём той части конуса, которая примыкает к его основанию, если объём всего конуса равен 54?



Ответ: _____.

3

В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов. Только в двух билетах встречается вопрос о грибах. На экзамене выпускнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете будет вопрос о грибах.

Ответ: _____.

ИЛИ

Вероятность того, что мотор холодильника прослужит более 1 года, равна 0,8, а вероятность того, что он прослужит более 2 лет, равна 0,6. Какова вероятность того, что мотор прослужит более 1 года, но не более 2 лет?

Ответ: _____.

4

Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

Ответ: _____.

ИЛИ

В городе 48 % взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,6 % взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15 %. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Ответ: _____.

5 Найдите корень уравнения $3^{x-5} = 81$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите корень уравнения $\sqrt{3x+49} = 10$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите корень уравнения $\log_8(5x+47) = 3$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Решите уравнение $\sqrt{2x+3} = x$. Если корней окажется несколько, то в ответе запишите наименьший из них.

Ответ: _____.

6 Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите значение выражения $16 \log_7 \sqrt[4]{7}$.

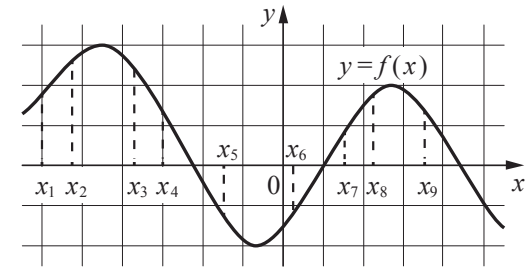
Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите значение выражения $4^{\frac{1}{5}} \cdot 16^{\frac{9}{10}}$.

Ответ: _____.

7 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, \dots, x_9 .

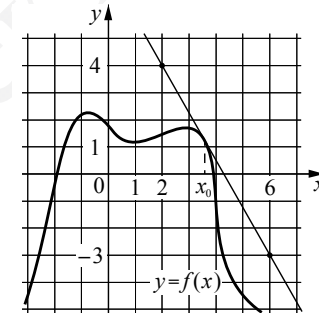


Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество этих точек.

Ответ: _____.

ИЛИ

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

8 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приёмник регистрирует частоту сигнала, отражённого от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемого сигнала (в МГц), f – частота отражённого сигнала (в МГц). Найдите частоту отражённого сигнала (в МГц), если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

Ответ: _____.

9 Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

Ответ: _____.

ИЛИ

Смешав 45%-ный и 97%-ный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62%-ный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50%-ного раствора той же кислоты, то получили бы 72%-ный раствор кислоты. Сколько килограммов 45%-ного раствора использовали для получения смеси?

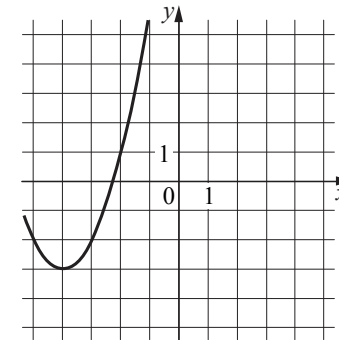
Ответ: _____.

ИЛИ

Автомобиль, движущийся с постоянной скоростью 70 км/ч по прямому шоссе, обгоняет другой автомобиль, движущийся в ту же сторону с постоянной скоростью 40 км/ч. Каким будет расстояние (в километрах) между этими автомобилями через 15 минут после обгона?

Ответ: _____.

10 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите значение $f(-12)$.



Ответ: _____.

11 Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - 9\ln(x + 11) + 7$ на отрезке $[-10, 5; 0]$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите точку максимума функции $y = (x + 8)^2 \cdot e^{3-x}$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 256}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте **БЛАНК ОТВЕТОВ № 2**. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 12 а) Решите уравнение

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos 2x = \sqrt{3} \cos x + 1.$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

- 13 Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N – середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

- а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
 б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

- 14 Решите неравенство $\log_{11} (8x^2 + 7) - \log_{11} (x^2 + x + 1) \geq \log_{11} \left(\frac{x}{x+5} + 7 \right)$.

- 15 15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1,0	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

- 16 Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй – в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
 б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

- 17 Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- 18 В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. В каждой школе тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

- а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?
 б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?
 в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ			
	Пример 1	Пример 2	Пример 3	Пример 4
1	9	17	93	3
2	0,08	0,2		
3	64	6	154	16
4	-0,96	4	16	
5	4	12	52	
6	4	-1,75		
7	751			
8	5	15	7,5	
9	61			
10	0,6	0,1		
11	-83	-6	16	

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным; все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

12 а) Решите уравнение

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos 2x = \sqrt{3} \cos x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x + 1 - 2 \sin^2 x = \sqrt{3} \cos x + 1; \sin x - 2 \sin^2 x = 0; \sin x \cdot (2 \sin x - 1) = 0.$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$,

или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

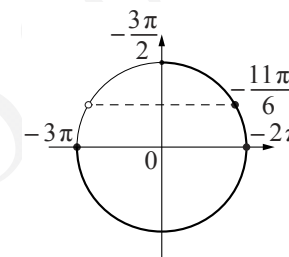
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

Получим числа: $-3\pi; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } -3\pi; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}.$$



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

- 13** Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N – середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.
 а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
 б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

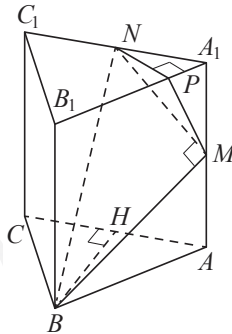
Решение. а) Пусть точка H – середина AC . Тогда

$$BN^2 = BH^2 + NH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63.$$

Вместе с тем $BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63$, тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M .

б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1 . Тогда $NP \perp A_1B_1$ и $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP – проекция MN на плоскость ABB_1 .

Прямая BM перпендикулярна MN , тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP – линейный угол искомого угла.



Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, т.е. $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому $\sin \angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$. Следовательно, $\angle NMP = \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Ответ: б) $\arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 14** Решите неравенство $\log_{11}(8x^2 + 7) - \log_{11}(x^2 + x + 1) \geq \log_{11}\left(\frac{x}{x+5} + 7\right)$.

Решение. Правая часть неравенства определена при $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$.

Поскольку при любых значениях x выражение $8x^2 + 7$ принимает положительные значения, при $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$ неравенство принимает вид:

$$\frac{8x^2 + 7}{x^2 + x + 1} \geq \frac{8x + 35}{x + 5}; \frac{8x^3 + 40x^2 + 7x + 35}{(x + 5)(x^2 + x + 1)} \geq \frac{8x^3 + 43x^2 + 43x + 35}{(x + 5)(x^2 + x + 1)};$$

$$\frac{3x^2 + 36x}{(x + 5)(x^2 + x + 1)} \leq 0; \frac{3x(x + 12)}{(x + 5)(x^2 + x + 1)} \leq 0,$$

откуда $x \leq -12$; $-5 < x \leq 0$. Учитывая ограничения $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$, получаем: $x \leq -12$; $-\frac{35}{8} < x \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; -12]$; $(-\frac{35}{8}; 0]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -12 и/или 0 , ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

- 15** 15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1,0	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Решение. По условию долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1; 0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0.$$

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k; 0,6k; 0,4k; 0,3k; 0,2k; 0,1k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k - 0,6; 0,6k - 0,4; 0,4k - 0,3; 0,3k - 0,2; 0,2k - 0,1; 0,1k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$k(1 + 0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) - (0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) = \\ = (k - 1)(1 + 0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) + 1 = 2,6(k - 1) + 1.$$

По условию общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей, значит,

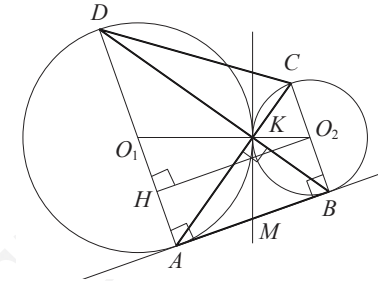
$$2,6(k - 1) + 1 < 1,2; 2,6 \cdot \frac{r}{100} + 1 < 1,2; r < 7 \frac{9}{13}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства – число 7. Значит, искомое число процентов – 7.

Ответ: 7.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

- 16** Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй – в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .
- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
 б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



Решение. а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно.

Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K , пересекает AB в точке M . По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB , у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный.

Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD . Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая – радиус 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\frac{AD}{BC} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда

$$S_{AKD} = 16S.$$

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$,

т.е. $S_{AKB} = 4S$. Аналогично $S_{CKD} = 4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H , равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1 :

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0,8$ и $S_{AKB} = 4S = 3,2$.

Ответ: 3,2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

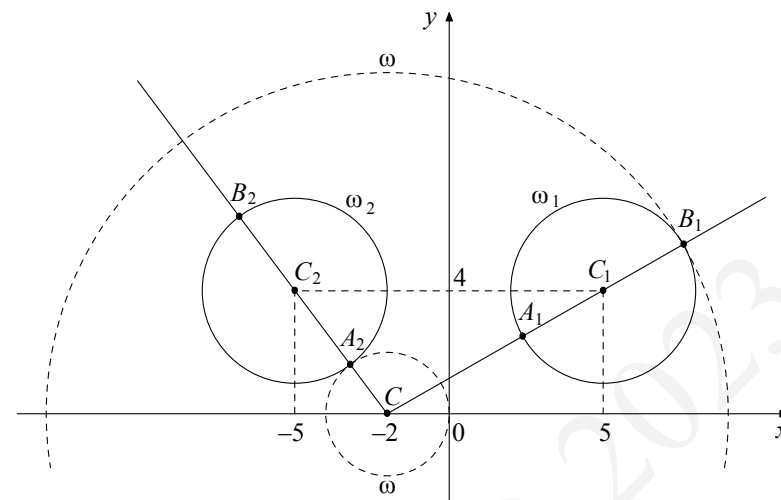
17 Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 9$ задаёт окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5; 4)$ и радиусом 3, а если $x < 0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5; 4)$ и таким же радиусом (см. рисунок).

При положительных значениях a уравнение $(x+2)^2 + y^2 = a^2$ задаёт окружность ω с центром в точке $C(-2; 0)$ и радиусом a . Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения a , при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2 .



Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим через A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1 , где A_1 лежит между C и C_1 . Так как

$$CC_1 = \sqrt{(5+2)^2 + 4^2} = \sqrt{65}, \text{ то } CA_1 = \sqrt{65} - 3, CB_1 = \sqrt{65} + 3.$$

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим через A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2 , где A_2 лежит между C и C_2 . Так как

$$CC_2 = \sqrt{(-5+2)^2 + 4^2} = 5, \text{ то } CA_2 = 5 - 3 = 2, CB_2 = 5 + 3 = 8.$$

При $a < CA_2$ или $a > CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2 < a < CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a = CA_2$ или $a = CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a = 2$ и $a = \sqrt{65} + 3$.

Ответ: 2; $\sqrt{65} + 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

18

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. В каждой школе тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

Решение. а) Пусть в школе № 1 писали тест 2 учащихся, один из них набрал 1 балл, а второй набрал 19 баллов и перешёл в школу № 2. Тогда средний балл в школе № 1 уменьшился в 10 раз.

б) Пусть в школе № 2 писали тест m учащихся, средний балл равнялся B , а перешедший в неё учащийся набрал u баллов. Тогда получаем:

$$u = 0,9(m+1)B - mB; 10u = (9-m)B.$$

Если $B=7$, то $(9-m)B$ не делится на 10, а $10u$ делится на 10. Но это невозможно, поскольку $10u = (9-m)B$.

в) Пусть в школе № 1 средний балл равнялся A . Тогда получаем:

$$u = (9-m)A - 0,9(8-m)A; 10u = (18-m)A = (9-m)B.$$

Заметим, что если $B=1$ или $B=3$, то $10u = (9-m)B$ не делится на 10. Если $B=2$ или $B=4$, то $m=4$. В первом случае $14A=10$, а во втором $14A=20$. Значит, ни один из этих случаев не возможен.

При $B=5$ и $m=3$ получаем $u=3$ и $A=2$. Этот случай реализуется, например, если в школе № 1 писали тест 6 учащихся, 3 из них набрали по 1 баллу, а 3 – по 3 балла, в школе № 2 писали тест 3 учащихся и каждый набрал по 5 баллов, а у перешедшего из одной школы в другую учащегося – 3 балла.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах a , b и v	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте v и обоснованно получен верный ответ в пункте a или b	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах a и b ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте v	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте a или b	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнанадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развёрнутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения.

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.